Some inequalities between invariants of blocks (Codes, lattices, vertex operator algebras and finite groups)

和田, 倶幸

数理解析研究所講究録 1228 巻 2001 年 109-116

Some inequalities between invariants of blocks

東京農工大学・工　和田倶幸　(Tomoyuki Wada)
Tokyo University of Agriculture and Technology

これは Jena 大学 (Germany) の Burkhard Külshammer との共同研究の報告です.

1 Introduction

p を素数とし, B を有限群の G の p-block でその Cartan 行列を $C=(c_{ij})$ とする. また $k=k(B)$ を B の通常既約指標の個数, $l=l(B)$ を既約Brauer指標の個数とする. [1] で J. Brandt は次が成り立つことをを示した.

$$(*) \qquad k(B)\leq 1-l(B)+\sum_{i=1}^{l(B)}c_{ii}.$$

[12] で著者は次が成り立つことを次を示した.

$$(**) \qquad k(B)\leq \sum_{i=1}^{l(B)}c_{ii}-\sum_{i=1}^{l(B)-1}c_{i,i+1}.$$

$\rho(B)$ を C の Perron-Frobenius 固有値とするとき, 著者は [12] で,ある種の p-可解群では, $k(B)\leq\rho(B)$ が成り立つことを示した. D を B の defect group とすると, p-可解群では $\rho(B)\leq|D|$ が成り立つので, もし $k(B)\leq\rho(B)$ という不等式が p-可解群で成り立つならば, Brauer の $k(B)$-予想 $k(B)\leq|D|$ が p-可解群のときに言えることになる. ただし [12] では $(**)$ から直接 $k(B)\leq\rho(B)$ を導くことのできない場合がたくさんあった. その後 Külshammer の指摘により, $(**)$ の証明の中には A 型の positive definite quadratic form が使われていて, 他の weakly positive な integral form からこのような不等式がたくさん得られることが分かった. その中には良い不等式もあり $(**)$ では言えなかったが, それを使うと $k(B)\leq\rho(B)$ が言える場合があった.

2 Integral quadratic forms

Definition 1 *integral quadratic form* とは係数が整数である2次形式

$$q=q(X_1,\cdots,X_l)=\sum_{1\leq i\leq j\leq l}q_{ij}X_iX_j$$

のこととする．q が *weakly positive* とは $q(z) > 0$ for all $z \in \mathbf{Z}^l$ with $z > 0$ のときをいう．ここで $\leq$ は $\mathbf{Z}^l$ 上の半順序で $(x_1, \dots, x_l) \leq (y_1, \dots, y_l)$ を $x_i \leq y_i$ for all $i = 1, \dots, l$ のこととする．また $(x_1, \dots, x_l) \leq (y_1, \dots, y_l)$ かつ $(x_1, \dots, x_l) \neq (y_1, \dots, y_l)$ のとき $(x_1, \dots, x_l) < (y_1, \dots, y_l)$ と書く．$0 \neq z \in \mathbf{Z}^l$ に対して $q(z) > 0$ のとき q を *positive definite* という．このとき次が成り立つ．

Theorem A. *Let p be a prime number, and let B be a p-block of a finite group G with Cartan matrix $C = (c_{ij})$. Moreover, let $q = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} X_i X_j$ be a weakly positive integral quadratic form. Then*

$$k(B) \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij}.$$

In particular, if q is a positive definite integral quadratic form then the inequality above holds for the Cartan matrix with respect to an arbitrary basic set.

Proof. $r = 1, \dots, k(B)$ に対し $d_r = (d_{r1}, \dots, d_{rl(B)})$ を B の decomposition 行列 $D = (d_{ij})$ の第 r 行とする．すると

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} \sum_{r=1}^{k(B)} q_{ij} d_{ri} d_{rj} = \sum_{r=1}^{k(B)} q(d_r) \geq k(B),$$

より不等式が成立する．

また B の任意の basic set S に対し C', D' を B の S に対する Cartan 行列と decomposition 行列とする．すると $C' = D'^T D'$ より q が positive definite ならば D' の任意の d'_r に対して $q(d'_r) > 0$ が成り立つ．

3 Positive definite integral quadratic forms

重要な positive definite integral quadratic form（以下これを p.d.i.q.f. と略記する）の例は Dynkin 図形から来る．A_l 型の Dynkin 図形から，

$$q = \sum_{i=1}^{l} X_i^2 - \sum_{i=1}^{l-1} X_i X_{i+1}$$

という quadratic form q が得られ， Theorem A より (**) は実はこれから得られる．同様にして他の indecomposable Dynkin diagram から次の不等式が得られる．なお integral form にするため B, F, G 型は少し変形している．

$$
\begin{aligned}
&(B_l) \quad k(B) \le \sum_{i=1}^{l-1} c_{ii} + 2c_{ll} - \sum_{i=1}^{l-2} c_{i,i+1} - 2c_{l-1,l} \\
&(D_l) \quad k(B) \le \sum_{i=1}^{l} c_{ii} - \sum_{i=2}^{4} c_{1i} - \sum_{i=4}^{l-1} c_{i,i+1} \\
&(E_6) \quad k(B) \le \sum_{i=1}^{6} c_{ii} - \sum_{i=1}^{4} c_{i,i+1} - c_{36} \\
&(E_7) \quad k(B) \le \sum_{i=1}^{7} c_{ii} - \sum_{i=1}^{5} c_{i,i+1} - c_{37} \\
&(E_8) \quad k(B) \le \sum_{i=1}^{8} c_{ii} - \sum_{i=1}^{6} c_{i,i+1} - c_{38} \\
&(F_4) \quad k(B) \le c_{11} + c_{22} + 2c_{33} + 2c_{44} - c_{12} - 2c_{23} - 2c_{34} \\
&(G_2) \quad k(B) \le c_{11} + 3c_{22} - 3c_{12}.
\end{aligned}
$$

ここで $l = l(B)$ は B に含まれる既約 Brauer character の個数を表す. $l(B) = 2$ の block B について 3 つの不等式が得られるが, それを比較してみる.

$$
\begin{aligned}
&(A_2) \quad k(B) \le c_{11} + c_{22} - c_{12} \\
&(B_2) \quad k(B) \le c_{11} + 2c_{22} - 2c_{12} \\
&(G_2) \quad k(B) \le c_{11} + 3c_{22} - 3c_{12}.
\end{aligned}
$$

(A_2) は $c_{12} < c_{22}$ のとき最強で, (G_2) は $c_{12} > c_{22}$ のとき最強である. これらは $p = 2$ で対称群 S_4 と S_5のとき実際に起こる.

Example 1.

$$S_4: \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad k(B) = 5 = 4 + 3 - 2$$

$$S_5: \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad k(B) = 5 = 8 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 4.$$

4 Sharpness

Definition 2. p.d.i.q.f. q に対し $k(B) = \sum_{1\le i\le j\le l(B)} q_{ij}c_{ij}$ が成り立つとき, p-block B を q-sharp とよぶことにする.

Example 1 については次のような解釈ができる. $G, B, C = (c_{ij})$ を有限群, p-block, その Cartan 行列とし, $\tilde{G}, \tilde{B}, \tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$ を別の有限群, その p-block, その Cartan行列とする. そして $V \in \mathrm{Mat}(l, \mathbf{Z})$ を unimodular な行列とし, $\tilde{C} = V^T C V$ をみたすとする. (これは例えば B と $\tilde{B}$ が Rickard equivalent あるいは一般に, perfectly isometric なら成り立つ (see [2]). さらに $q = \sum_{1\le i\le j\le l} q_{ij}X_iX_j$ を p.d.i.q.f. とし, Q を対応する対称行列とする (i.e. $q(z) = zQz^T$ for $z \in \mathbf{Z}^l$). このとき $\tilde{Q} := V^{-1}Q(V^{-1})^T$ とおき $\tilde{q}$ を $\tilde{Q}$ に対応する (positive definite) i.q.f. $\tilde{q} = \sum_{1\le i\le j\le l} \tilde{q}_{ij}X_iX_j$ とする (i.e. $\tilde{q}(z) = z\tilde{Q}z^T$ for $z \in \mathbf{Z}^l$). すると $\tilde{Q}\tilde{C} = V^{-1}QCV$ より

$$\sum_{1\le i\le j\le l(B)} \tilde{q}_{ij}\tilde{c}_{ij} = \mathrm{tr}(\tilde{Q}\tilde{C}) = \mathrm{tr}(QC) = \sum_{1\le i\le j\le l(B)} q_{ij}c_{ij}$$

である. このことから次を得る.

Proposition B. Suppose B and $\tilde{B}$ are Rickard equivalent. Then B is q-sharp if and only if $\tilde{B}$ is $\tilde{q}$-sharp.

Remark 1. Example 1 では実際、

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{であり}, V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

とすれば、$\tilde{C} = V^T C V$, $\tilde{Q} := V^{-1}Q(V^{-1})^T$ となっている. この V^{-1} の存在により, A_2 型と G_2 型の p.d.i.q.f. は $\mathbf{Z}$-equivalent になっている.

Example 2. Let B be a p-block with cyclic defect group P, then B is q-sharp for some p.d.i.q.f. q.

Proof. Rickard, Linkelmann により cyclic block B は, その正規化群 $N_G(P)$ の Brauer 対応子 $\tilde{B}$ と Rickard equivalent であることが示されている. $\tilde{B}$ の Brauer tree は exeptional vertex が中心にある星型になっており, その Cartan 行列は m を tree の multiplicity とす

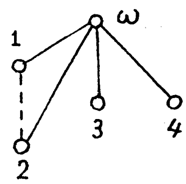
$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} m+1 & m & \cdots & m \\ m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m \\ m & \cdots & m & m+1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad k(\tilde{B}) = l(\tilde{B}) + m$$

となる. このとき (A_l) 型の不等式 (**) はちょうど等式になっていて, $\tilde{B}$ は A_l-sharp である. Proposition B より B はある q について q-sharp となる.

Remark 2. どの p-block B もいつもある q があって q-sharp というわけではない. 例えば、$G = S_4 \times C_2$, $H = \mathrm{GL}(2,3)$, $p = 2$, $B = B_0(G)$, $\tilde{B} = B_0(H)$ とする. ここで C_2 は cyclic group of order 2, $B_0(G)$, $B_0(H)$ はそれぞれ G, H の principal p-block とする. すると $l(B) = l(\tilde{B}) = 2$ で同じ Cartan 行列
$C = \tilde{C} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, (see Example 2.7 in [9]) をもつ. このとき $k(B) = 10$, $k(\tilde{B}) = 8$ と異なるので, $\tilde{B}$ はどの p.d.i.q.f. q に対しても q-sharp にならない. B は A_2-sharp である.

5 Graphical form $F(2,2)$

[10] の p.12 にある種の weakly positive graphical form が分類されていて, その中に $F(2,2)$ がある.

$F(2,2)$: 

(実線は -, 破線は +) : $q = {X_\omega}^2 + \sum_{i=1}^{4} {X_i}^2 - \sum_{i=1}^{4} X_\omega X_i + X_1 X_2$.

これから $l(B) = 5$ の p-block B に対して不等式

$$(F(2,2)) \qquad k(B) \leq \sum_{i=1}^{5} c_{ii} - \sum_{i=2}^{5} c_{1i} + c_{23}$$

を得る. [10] にあるように実は $F(2,2)$ は D_5 と Z-equivalent であり, したがって $F(2,2)$ は positive definite である.

Example 3. (1) $G = D_8 \cdot E_9$ (i.e. the semidirect product of a dihedral group of order 8 with an elementary abelian group of order 9, for $p = 3$, $B = B_0(G)$:

$$|G| = 72,\ C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ k(B) = 9 = 5+3+3+3+3-2-2-2-2+0$$

より B は $F(2,2)$-sharp, しかし D_5-sharp ではない. これは A_5-sharp が言えない場合だった。

(2) $G = A\Gamma L(1,8) \simeq Fr_{21} \cdot E_8$ of order 168, for $p = 2$ (the affine semilinear group), $B = B_0(G)$:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ k(B) = 8 = 4+2+2+2+4-1-1-1-3+0$$

より $F(2,2)$-sharp となる. これは D_5-sharp にもなる. やはり A_5-sharp が言えない場合だった.

Definition 3. $x \in \mathbf{Z}^l$ が $q(x) = 1$ をみたすとき q の 1-*root* とよぶ.

Corollary B. *In the situation of Theorem A, we have*

$$k(B) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq l(B)} q_{ij} c_{ij}$$

if and only if all rows of the decomposition matrix D of B are 1-roots of q.

Example 4. B を simple Ree group $R(q)$ とし $p = 2, B = B_0(G)$ とする. $P \simeq E_8$ で

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \text{また} \ k(B) = 8$$

となる (see [8]). このとき B は D_5-sharp となる.

Example 5. G を Janko group J_1 とし, $B = B_0(G), p = 2$ とする. $P \simeq E_8$ で Cartan 行列は

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \text{また} \ k(B) = 8 \ \text{となる (see[4]).}$$

このとき不等式 (D_5) は等式にならない.

$$k(B) = 8 \leq 8+4+4+4+4-4-4-4-3 = 9$$

で実際 decomposition 行列のある行は D_5 の 1-root にならない. 同様に B は$F(2,2)$-sharp にもならない. しかしある p.d.i.q.f. q があって B は q-sharp となる. なぜなら $\tilde{G} = N_G(P) \simeq A\Gamma L(1,8)$ で Example 3 (2) により B の Brauer 対応子 $\tilde{B}$ は $F(2,2)$-sharp だった. Broué ([3]) により B と $\tilde{B}$ は perfectly isometric なので Proposition B により B はある p.d.i.q.f. q があって q-sharp となる.

Remark 3. Example 5 で Okuyama は B と $\tilde{B}$ が Rickard equivalent であることを証明している. 最近の結果では, Koshitani-Miyachi [6] により $G = \mathrm{GL}(4,q), p = 3, q \equiv 2,5 (\mathrm{mod}\ 9), B = B_0(G)$ のとき $N_G(P) \simeq D_8 \cdot E_9$ より q-sharp となる. Kunugi [7] により $G = \mathrm{PSL}(3,q), p = 3, q \equiv 4,7 (\mathrm{mod}\ 9), B = B_0(G)$ のときも同様に q-sharp となる. 現在の所 sharp を見つける場合, $(A_l), (D_l), (F(2,2))$ 型の不等式から sharp になることが多いが、それ以外では [10] にある $(F(3))$ 型の不等式から sharp になる例として, Hall-Janko の単純群 $G = J_2, p = 5, B = B_0(G)$ がある. このとき $N_G(P) \simeq D_{12} \cdot E_{25}$ で B の Brauer 対応子を $\tilde{B}$ とすると $l(B) = l(\tilde{B}) = 6$ で $\tilde{B}$ は $F(3)$-sharp となる. B と $\tilde{B}$ は Rouqier ([11]) により perfect isometric であることが示されており, B は q-sharp となる. なお Holloway により derived equivalent になることが示されているようである.

Remark 4. 次が知られている (see[10]). q を weakly positive integral unit form (i.e. $q_{ii} = 1$ for all $i = 1, 2, \cdots, l$) とする.

(1) (Drozd) q は有限個の positive 1-roots をもつ.

(2) (Ovsienko) q の任意の positive 1-root $(z_1, \cdots, z_l)$ は, $z_i \leq 6$ for all $i = 1, \cdots, l$ をみたす. 特に, B がある weakly positive integral unit form q に対し q-sharp ならば, 任意の分解数について $d_{ij} \leq 6$ である.

Remark 5. Theorem A は group algebra のみならず $C = D^T D$ をみたす algebra で成立する. そのような例として cellular algebra がある (see [5]).

参考文献

[1] J. Brandt, ***A lower bound for the number of irreducible characters in a block***, J. Algebra **74**, 509-515(1982).

[2] M. Broué, ***Equivalences of blocks of group algebras,*** in "Finite dimensional algebras and related topics", V. Dlab et al. (ed.), Kluwer, Dordrecht, 1-26(1994).

[3] M. Broué, ***Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées,*** Astérisque 181-182, 61-92(1990).

[4] P. Fong, ***On the decomposition numbers of*** J_1 ***and*** $R(q)$, Symp. Math. Rome **13** (1972), Academic Press, 415-422(1974).

[5] J. J. Graham and G. I. Lehrer, ***Cellular Algebras,*** Invent. Math. **123**, 1-34(1986).

[6] S. Koshitani and H. Miyachi, ***The principal 3-blocks of four- and five-dimensional projective special linear groups in non-defining characteristic,*** J. Algebra **226**, 788-806(2000).

[7] N. Kunugi, ***Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups,*** Proc. London Math. Soc. (3), **80**, 575-589(2000).

[8] P. Landrock and G.O. Michler, ***Principal 2-blocks of the simple groups of Ree type,*** Trans. Amer. Math. Soc. **260**, 83-111(1980).

[9] Y. Ninomiya and T. Wada, ***Cartan matrices for blocks of finite p-solvable groups with two simple modules,*** J. Algebra **143**, 315-333(1991).

[10] C.M. Ringel, ***Tame algebras and integral quadratic forms,*** Lect. Notes in Math. 1099, Springer-Verlag, Berlin 1984.

[11] R. Rouqier, ***Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques,*** J. Algebra **168**, 648-694(1994).

[12] T. Wada, ***A lower bound on the Perron-Frobenius eigenvalue of the Cartan matrix of a finite group,*** Arch. Math. **73**, 407-413(1999).